位数P^nのf.p.f.a.を持つ群について (有限群の研究)

松山, 広

数理解析研究所講究録
200巻 1974年 38-41

位数p^nのf.p.f.aを持つ群について

阪大 理 松山 広

§0

1960年代の初めに、次の様な予想が立てられた。

「$\mathrm{Aut}(G) \supseteq A$, $C_G(A)=1$, $|A| = p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$

$$\left\{\begin{array}{l} (|A|, |G|)=1 \\ \text{or } A=\text{cyclic} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ $G=$ solvable かつ $\mathrm{nilp}(G) \leq \sum_{i=1}^{s} a_i$ 」

Thompson による Frobenius 予想の解決以来、Aに、具体的な形を与えた様々な結果が得られたが、一般的な解決には至っていない。例えば、Aが素数巾位数のcyclic群としても、"$n=1$", "$p=2$ かつ $n=2$" 以外の Case では、G の可解性は示されていない。しかし、Gを可解群とすると、nilpotent length の方は、Hoffman [1], Shult [2], Gross [3] により、"$p=2$ かつ G の Sylow q-subgroup が nonabelian for some $q=$ Mersenne prime $\in \pi(G)$" 以外の Case では、予想の正しいことが示されている。$A \cong Z_p \times \cdots \times Z_p$ のときは、Martineau [4], [5], [6] により、$A \cong Z_{rs}$ $(r \neq s)$ のときは、

Ralston[7]によりそれぞれGの可解性が示されている。

§1.

ここでは、標題とは関係のない次の事実と証明の概略を紹介する。

Prop.

イ) $\pi(G) \ni \exists p_1, \exists p_2, \exists p_3$ = distinct primes such that

$\#\{Syl_{p_1}(G)\} = p_2$巾, $\#\{Syl_{p_i}(G)\} =$ 素数巾 $i=1,2$

$\Rightarrow \exists j \in \{1,2,3\}$ s.t. $\langle Syl_{p_j}(G) \rangle \precneqq G$

ロ) $\#\{Syl_p(G)\} =$ 素数巾 for any $p \in \pi(G)$

$\Rightarrow G =$ solv.

証明の概略、

イ) $P_1 = S_{p_1}$ of G とする。$N = N_G(P_1)$ とおく。$N \neq G$ としてよい。

$P_2 = S_{p_2}$ of G とすると、仮定から、$G = NP_2$ と書ける。

$\exists P_3 = S_{p_3}$ of G st $P_3 \leq N$. もし、$\#\{Syl_{p_3}(G)\} \neq p_2$巾 なら

$P_3^G \trianglelefteq N$ より、よい。よって $\#\{Syl_{p_3}(G)\} = p_2$巾 としてよい。

$\#\{Syl_{p_2}(G)\} \neq p_i$巾 for some $i \in \{1,3\}$.

$\therefore N_G(P_2) \supseteq \exists \hat{P_i} = S_{p_i}$ of G.

よって、$\hat{P_i}^G \subseteq N_G(P_2)$ よりよい。

ロ) $\#\{\pi(G)\} \geq 3$ by Burnside. 但し、G = minimal な反例。

イ)より Proper normal subgp N がある。$(N \neq 1)$

N と G/N がまた仮定を満足することを示せばよい。

§2.

ここでは，$A \cong Z_{p^n}$ のとき，G の構造が非常に制限されるであろうという予想を述べ，強い条件つきではあるが，その予想の正しいことを示す。（A は §0 のと同じ。）

[3] および [7] などから，次の様なことが自然に予想される。

予想1　$A=\langle \varphi \rangle \cong Z_{p^n}$，$n=2$ or $p=\text{odd}$ ならば，
$G = F(G)\, C_G(\varphi^{p^{n-1}})$ と書けるか？

Prop. 1.　(for any prime p)
$G/F(G)$ の Sylow q-subgroup = abelian for $\forall q \in \pi(G)$
$\Rightarrow$ $G = F(G)\, C_G(\varphi^{p^{n-1}})$

Prop. 2.　$G = \text{solvable}$ とする。
$n=1, 2$ or $p=\text{odd}$ ならば，$G = F(G)\, C_G(\varphi^{p^{n-1}})$

Cor. 3.　(Prop. 2 と同じ仮定のもとに)
i) $[G, \varphi^{p^{n-1}}] = \text{nilpotent}$
ii) $G = F_k(G)\, C_G(\varphi^{p^{n-k}})$　$(k=1, \dots, n)$　$F_k(G)$ = 第 k Fitting
iii) $G^{(d(p))} = \text{nilpotent}$, if $n=2$.
但し，$d(p) = \text{Max}\{$位数 p の f.p.f.a を持つ群の交換子群列の長さ$\}$

証明の概略および注意

Prop. 1 については Scimeni [8] や Grün による Focal 群についての結果を用いて容易に証明できる。Prop. 1 が $p=2$

でも成立することは、次の予想を導く。

予想「$A \simeq Z_2^n$, $\overline{G}$のSylow q-subsp. = abelian for any q = Mersenne prime $\in \pi(\overline{G})$, (但し, $\overline{G} = G/F(G)$).
ならば, $G = F(G)C_G(\Phi^{2^n-1})$ となるか?」

Prop 2は [3] を用いて, Prop I とほぼ同様にして証明できる. Cor 3 はすべて明白だが, i) は, $C_G(\Phi^{p^n-1})$ が G の生成に関係しないとき, 即ち, Φ^{p^n-1} が G に疑似的に f.p.f. a として act すると, G = nilpotent になることを示している. また ii) では, $K = n$ とすると $G = F_n(G)$ となり nil$(G) \leq n$ を示している. iii) は, Ward [9] を改良した結果になっている.

—終—

参考

[1] Hoffman Math. Z. 1964

[2] Shult Ill. Jour. Math 1965

[3] Gross Proc. A.M.S. 1966

[4] Martineau Math. Z. 1972

[5] 〃 Quart. J. Math 1972

[6] 〃 Math. Z. 1973

[7] Ralston Jour. of Alg. 1972

[8] Scimemi Jour. of Alg. 1968

[9] Ward. J. Austral. Math. Soc. 1969

千.